REVISTA PERUANA DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA
2017, No.9, pp.171-198

Propuesta de análisis de la metodología de clases matemáticas universitarias: El modelo del conocimiento didáctico-matemático[1]

Proposal of analysis of the methodology of the university mathematics lectures: the didactical-mathematical model of knowledge

Teresa Sofía Oviedo Millones
Pontificia Universidad Católica del Perú
sofia.oviedo@pucp.edu.pe

Recibido: 16-04-2017
Aprobado: 30-07-2017

1. Este artículo es parte de mi tesis de doctorado –aún en proceso– en Ciencias de la Educación en la Pontificia Universidad Católica del Perú.

Resumen

Esta investigación se inscribe en el campo de formación matemática y didáctica de profesores. Desde esta perspectiva, ella informa y ejemplifica la aplicación del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM) en el análisis de las metodologías de clases universitarias de matemática. Este modelo está basado en las herramientas teórico-metodológicas del enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática.

Este análisis adopta una perspectiva cualitativa: descriptiva e interpretativa con estudio de caso. Las fuentes de datos han sido transcripciones de las grabaciones de las clases de un docente muestra de estudio en un tema específico de matemáticas: funciones.

A partir de ello, se presentan resultados parciales con respecto a la aplicación del modelo CDM, los cuales muestran algunas de las características de la metodología de clase del docente en estudio. Se evidencian aspectos deficientes del conocimiento del docente, a partir de lo cual se incentiva a la reflexión sobre los conocimientos que se requiere en la gestión de enseñanza docente.

Palabras clave: Análisis de la información, enseñanza universitaria, formación de docentes, matemática, metodología

Abstract

This research focusses its attention in the field of mathematical and didactical teacher's instruction; in this field, the teacher plays a fundamental role in the improvement of the teaching and learning process. From this point of view, this research informs and shows specific examples of the application of the didactical mathematical knowledge (DMK), in the analysis of the methodology of university mathematics lectures. This model is based on the theoretical-methodological tools of the Onto Semiotic Approach (OSA) to mathematical knowledge and teaching. This analysis adopts a qualitative perspective: descriptive and interpretative whit case study. The data sources are the transcriptions of the video recording of the math lectures where the professor discusses a specific mathematics topic: functions.

This paper presents partial results regarding the application of the DMK model. These results show some characteristics of the professor's lecture methodology. It has been evidenced some deficiencies in the professor's knowledge, encouraging reflection on the knowledge required in the management of a professor's teaching.

Keywords: *Information analysis, university teaching, teacher's instruction, mathematics, methodology*

Propuesta de análisis de la metodología de clases matemáticas universitarias: El modelo del conocimiento didáctico-matemático

1. Introducción

El conocimiento de un profesor de matemáticas incluye muchos componentes adicionales al conocimiento matemático, tales como conocimientos para identificar la relación e interrelación entre estos conocimientos y su didáctica. «[…] estos conocimientos permitirán al profesor tener criterios para seleccionar las tareas, elaborar otras relacionadas, prever conflictos potenciales y planificar con sentido sus intervenciones en el aula» (Godino, Gonzato & Fernández, 2010, p. 342).

De acuerdo con Moreno y Azcárate (2003), en la mayoría de universidades, los docentes se inclinan a una enseñanza de carácter normativo, en la que es el estudiante un receptor pasivo del discurso del docente; frente a ello, proponen que debe haber un cambio en el papel del docente, que reflexione sobre su propia práctica para generar un aprendizaje más acorde con los diferentes estilos de aprendizaje de sus estudiantes. Además del dominio de la disciplina que se enseña, es necesario que el docente posea una didáctica estratégica en el desarrollo de sus clases. Sin embargo, uno de los problemas en didáctica de la matemática es la identificación de componentes del conocimiento del profesor requeridos para una enseñanza efectiva de tópicos específicos de la matemática. Ante este problema, es necesario caracterizar el conocimiento del profesor con la finalidad de que este reconozca en su metodología los aspectos matemáticos y didácticos para la gestión de una enseñanza idónea.

Existen varios modelos teóricos que «permiten analizar la actuación del profesor, describir la práctica docente, evaluar los conocimientos requeridos para una buena enseñanza de las matemáticas y consecuentemente elaborar planes de formación de profesores» (Godino, Batanero, Font & Giacomone, 2016, p. 285), es decir, caracterizar mediante sistemas de categorías el conocimiento requerido para la enseñanza de las matemáticas. Se encuentran, por ejemplo, los modelos de Schulman (1986, 1987): conocimiento del contenido, conocimiento pedagógico del contenido (PCK), conocimiento curricular, conocimiento pedagógico general, conocimiento de los estudiantes y sus características, conocimientos de los contextos educativos y conocimiento de los fines, propósitos y valores de la educación. Asimismo, se debe mencionar el estudio de Shoenfeld y Kilpatrick (2008) sobre la «proficiencia», así como la propuesta del cuarteto del conocimiento (KQ) de Rowland, Huckstep y Thwaites (2005), entre otros[2].

2. En la investigación de Pino-Fan y Godino (2015), se puede ver detalles al respecto.

Aunque la problemática de la enseñanza de las matemáticas se presenta en los diferentes niveles educativos, no existe un acuerdo universal sobre un marco teórico para describir el conocimiento de los profesores de matemática (Rowland & Ruthven, 2011). Bajo esta perspectiva, Godino (2009) realiza un análisis de los principales modelos de conocimiento matemático para la enseñanza, en los cuales identifica ciertas limitaciones, frente a las que propone un modelo teórico: el modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM). Dicho modelo contempla algunas de las categorías de los modelos anteriormente citados, que se complementan y desarrollan con las herramientas teórico-metodológicas del enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino & Batanero, 1994, 1998; Godino, Batanero & Font, 2007). Las categorías y subcategorías del modelo CDM posibilitan los conocimientos que deberían tener los docentes para la gestión adecuada del aprendizaje de sus estudiantes.

Con este modelo, entonces, se puede establecer –de acuerdo con la metodología de clases matemáticas utilizada por los docentes universitarios– un análisis pormenorizado, minucioso, de toda la trama de actividades realizadas en la actividad de enseñanza. Las categorías y subcategorías, así como las herramientas del EOS, las detallaremos de forma concisa en la siguiente sección.

El objetivo de esta investigación es mostrar, dentro de la metodología de clases del docente (muestra de estudio), las características de su conocimiento didáctico y matemático en el tema de funciones, analizado mediante el modelo CDM. A partir de ello, se busca inducir a que los docentes de matemáticas tomen conciencia de la trama de objetos y procesos que se ponen en juego en su actividad de enseñanza, y contemplen el análisis de sus clases para la mejora de su actividad de enseñanza. Para ello, se propone realizar este análisis mediante el modelo denominado «el modelo del conocimiento didáctico-matemático», que permite identificar sistemáticamente y minuciosamente estos objetos y procesos mediante categorías y subcategorías.

Se enfatiza que con el modelo CDM se han realizado varias investigaciones en el marco de formación de profesores de matemática y esto se aplica en los diferentes niveles educativos. En particular, en esta investigación, se aplica este modelo a la enseñanza matemática en el nivel universitario.

De los cinco niveles del EOS, que se detallan en la siguiente sección, se aplica de manera parcial el primer nivel, el segundo nivel y quinto nivel respectivamente: sistema de prácticas matemáticas, configuración de objetos y procesos, y la idoneidad didáctica. Las dimensiones del CDM que se utilizan corresponden a dos de las tres dimensiones: parte de la dimensión matemática y parte de la dimensión didáctica (las facetas epistémica, interaccional y mediacional), cuyos análisis son parte de una investigación más amplia, en la que se considera todas las dimensiones del CDM y todos los niveles del EOS.

2. Marco teórico

En esta investigación, se propone el modelo del conocimiento didáctico-matemático (Godino, 2009; Pino-Fan & Godino, 2015) para el análisis de la metodología de clases matemáticas universitarias. Se eligió este modelo, porque surge como un compendio del análisis de las investigaciones de modelos teóricos vistos anteriormente. Además, este organiza sistemáticamente categorías y subcategorías de conocimientos que deberían tener los docentes para gestionar adecuadamente los aprendizajes de sus estudiantes basándose en la aplicación de las herramientas de análisis didáctico propuestas por el enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática (Godino & Batanero, 1994, 1998; Godino, Batanero & Font, 2007), que permiten realizar un estudio minucioso de las diversas categorías de conocimientos del docente de matemáticas. A continuación, se describirá de manera concisa las herramientas del EOS y las categorías y subcategorías del modelo CDM.

En diversas investigaciones realizadas en el marco del EOS (Godino & Batanero, 1994; Font & Godino, 2006; Godino, Contreras & Font, 2006; Godino, Font & Wilhelmi, 2006; Godino, Font, Wilhelmi & Castro, 2007; Godino, Bencomo, Font & Wilhelmi,), se 2006 han propuesto cinco niveles o tipos de análisis aplicables a un proceso de estudio matemático (ya planificado o bien ya implementado). El primero corresponde a las prácticas matemáticas (operativas y discursivas). En el EOS, la actividad de resolución de problemas es la actividad central en la construcción del conocimiento matemático. Se consideran los significados institucionales (referencial, pretendido, implementado y evaluado) y los significados personales (global, declarado y logrado). En la realización de las prácticas matemáticas, intervienen y emergen objetos de diversos tipos, de acuerdo con la función que desempeñan en dichas prácticas. Todos los objetos están interconectados entre sí mediante funciones semióticas referenciales y operacionales, a partir de lo cual se forman configuraciones ontosemióticas de prácticas, objetos y procesos.

El segundo nivel corresponde a la configuración de objetos y procesos matemáticos emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas. En este caso, el EOS propone una tipología de objetos primarios emergentes de las prácticas matemáticas: situaciones-problema, elementos lingüísticos, conceptos, propiedades, procedimientos y argumentos. Estos seis tipos de objetos se relacionan entre sí y forman configuraciones que se definen como las redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas, y las relaciones que se establecen entre los mismos. Las configuraciones pueden ser epistémicas (redes de objetos institucionales) o cognitivas (redes de objetos personales), y se construyen a partir del planteamiento y resolución de una situación problema. Estos seis tipos de objetos primarios se complementan y enriquecen mediante cinco facetas o dimensiones duales: personal e institucional, ostensiva y no ostensiva, ejemplar y tipo, elemental y sistémica, y expresión y contenido. La emergencia de los objetos primarios tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos y argumentación. Además, las dimensiones duales dan lugar a los siguientes procesos cognitivos/epistémicos:

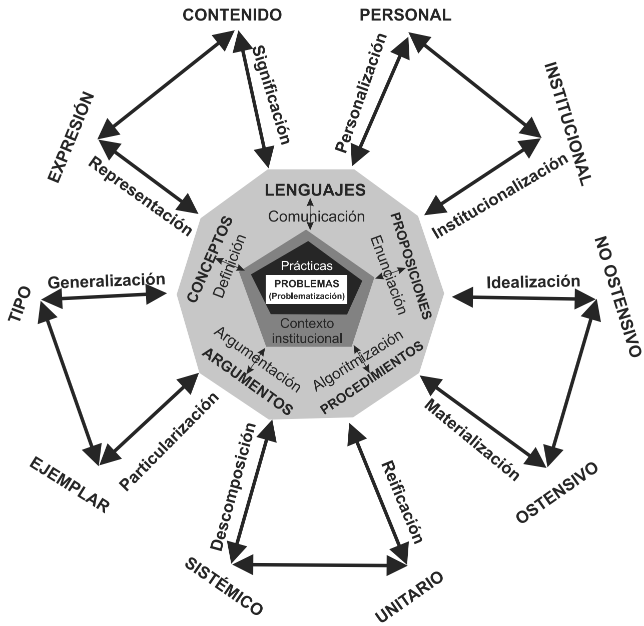
- Institucionalización-personalización,
- Generalización-particularización,
- Análisis/descomposición-síntesis/reificación,
- Materialización/concreción-idealización/abstracción
- Expresión/representación-significación.

En el tercer nivel, se encuentran la configuración didáctica y las trayectorias didácticas. Las configuraciones didácticas y su articulación en trayectorias didácticas están condicionadas y soportadas por una compleja trama de normas y metanormas (D'Amore & Godino, 2007) que regulan la dimensión epistémica de los procesos de estudio (primer y segundo nivel de análisis) y regulan otras dimensiones de los procesos de estudio (cognitiva, afectiva, etc.).

Desde el cuarto nivel, que corresponde a la identificación de normas y metanormas, se regulan la dimensión epistémica de los procesos de instrucción (niveles 1 y 2) y también otras dimensiones de estos procesos (cognitiva, afectiva, etc.). Finalmente, el quinto nivel, sobre la valoración de la idoneidad didáctica, consiste en un criterio general de adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático. El sistema de indicadores empíricos identificados en cada una de las facetas constituye una guía para el análisis y reflexión sistemática que aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje. Para determinar la idoneidad didáctica, se deben articular coherente y sistemáticamente seis componentes: idoneidad epistémica, idoneidad cognitiva, idoneidad interaccional, idoneidad mediacional, idoneidad afectiva e idoneidad ecológica.

A continuación, en el gráfico 1, se presenta los objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas.

Gráfico 1. Objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas



Fuente: Godino (2014, p. 23)

El modelo CDM explicita el vínculo y la interacción entre las seis facetas implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas –epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional y ecológica, las cuales serán detalladas más adelante–. En general, el modelo CDM presenta tres dimensiones: dimensión matemática, dimensión didáctica y dimensión metadidáctica matemática.

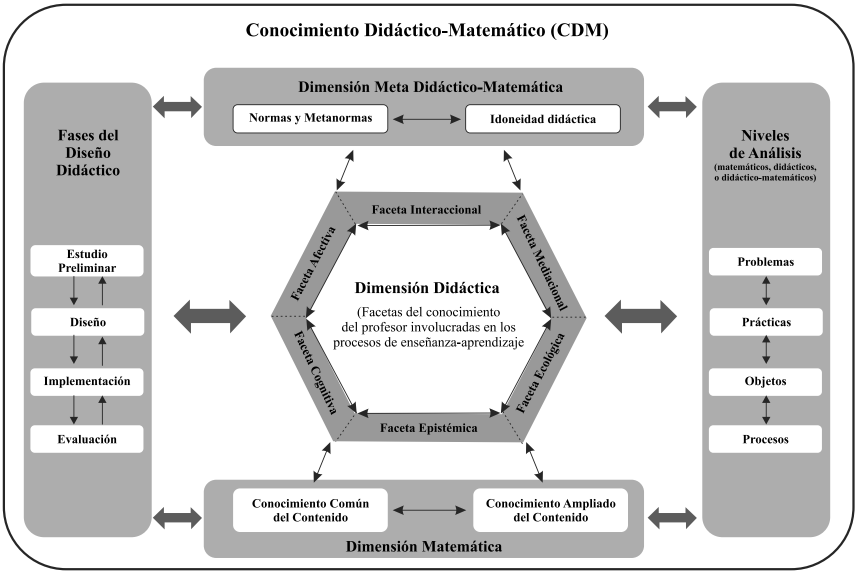
La primera propone tres categorías globales del conocimiento sobre el contenido matemático: conocimiento común del contenido, conocimiento avanzado del contenido y conocimiento especializado. La primera categoría remite a los conocimientos matemáticos no necesariamente orientados a la enseñanza, que el profesor debe poner en juego para resolver situaciones problemáticas en relación con un tema de matemáticas de un nivel educativo concreto en el que se enmarca la situación problema. Dicho conocimiento se analiza a través de la faceta epistémica. La segunda categoría –conocimiento avanzado del contenido– refiere a un conocimiento matemático que supone que el profesor, además de saber resolver situaciones problemáticas sobre un determinado tema y nivel, debe poseer conocimientos más avanzados que los previstos en el currículo. Ello se analiza a través de la faceta epistémica. Finalmente, el conocimiento especializado consiste en un conocimiento que diferencia al profesor de otras personas que saben matemáticas. Además de implicar conocimiento común y parte del conocimiento avanzado, «debe incluir la pluralidad de significados del objeto, la diversidad de configuraciones de objetos y procesos inherentes a tales significados y las necesarias articulaciones inherentes entre los mismos» (Pino-Fan, Godino & Font, 2013, p. 6). Este conocimiento es interpretado desde la faceta epistémica e incluye cuatro subcategorías: conocimiento del contenido especializado, conocimiento del contenido en relación con los estudiantes, conocimiento del contenido en relación con la enseñanza, y conocimiento del contenido en relación con el currículo. Para el análisis de estas categorías, se emplean herramientas teóricas del EOS.

La dimensión didáctica del modelo CDM comprende las seis facetas antes mencionadas:

- Faceta epistémica: conocimiento especializado de la dimensión matemática
- Faceta cognitiva: conocimiento sobre los aspectos cognitivos de los estudiantes
- Faceta afectiva: conocimiento sobre los aspectos afectivos, emocionales y actitudinales de los estudiantes
- Faceta interaccional: conocimiento sobre las interacciones que se suscitan en el aula
- Faceta mediacional: conocimiento sobre los recursos y medios que pueden potenciar los aprendizajes de los estudiantes
- Faceta ecológica: conocimiento sobre los aspectos curriculares, contextuales, sociales, políticos, económicos, etc., que influyen en la gestión de los aprendizajes de los estudiantes

En el gráfico 2, se muestra las dimensiones y componentes del modelo del conocimiento didáctico-matemático.

Gráfico 2. Dimensiones y componentes del modelo del conocimiento didáctico-matemático (CDM)



Fuente: Pino-Fan y Godino (2015, p. 103).

3. Metodología

La metodología que se utilizó fue de carácter cualitativo, correspondiente a un estudio de caso. Se realizó la descripción y análisis de la clase de un profesor en el tema de funciones matemáticas. Se analizaron las dos primeras clases (220 minutos) de funciones matemáticas de un curso de Matemática que dictó un docente de una institución universitaria en el lapso de 2 horas cada clase (con 60 alumnos matriculados en un curso de Matemática de primer semestre académico).

Se recogieron los datos a través de videos que realizó la investigadora para registrar las clases del docente muestra de estudio. Se aplicó la técnica de observación no participativa y se llevó a cabo el análisis de contenido de las transcripciones de los videos de las clases del docente. Previamente, para poder hacer la filmación de las clases del docente, se pidió permiso a la autoridad correspondiente de la institución en que se realizó esta investigación, así como al docente en estudio, aclarando los fines académicos de esta investigación tanto por escrito como oralmente. De este modo, se obtuvo el consentimiento para la filmación de las clases. A su vez, el docente del curso informó a los alumnos que las clases iban a ser filmadas para una investigación académica.

En este estudio, se consideran las dos primeras clases del docente, que fueron transcritas y posteriormente analizadas de acuerdo con el «modelo del conocimiento didáctico-matemático», que se basa en las herramientas teórico-metodológicas del enfoque ontosemiótico (EOS) del conocimiento y la instrucción matemática. Es decir, a partir de las categorías que propone el modelo CDM y con la aplicación de las herramientas que proporciona el EOS, fue posible analizar, interpretar y caracterizar los conocimientos del profesor de matemática, muestra de estudio. Ello comprende la promoción de su conocimiento común, ampliado y especializado en la resolución de tareas mediante distintos procedimientos, en la movilización de diversas representaciones, en la vinculación de objetos matemáticos y que integren el significado holístico para dicho objeto (Pino-Fan, Godino & Font, 2011), es decir, que se integre los diferentes significados parciales de las funciones.

Cabe anotar que, en esta investigación, se analizaron las facetas epistémica, interaccional y mediacional del docente de la dimensión didáctica del modelo CDM, aplicando tres de los niveles del EOS (como se mencionó anteriormente en la parte introductoria). Se realizó la aplicación de este modelo en la determinación de la metodología de la clase del docente muestra de estudio. Para ello, se diseñó un instrumento de análisis de la información basado en los criterios de idoneidad didáctica de los indicadores de idoneidad (Godino, 2013).

4. Resultados

A continuación, se presentan los resultados del significado de función que el docente utiliza en su práctica matemática (primer nivel del EOS), así como los resultados de los análisis en la dimensión matemática (faceta epistémica, en la que se aplican el segundo y quinto nivel del EOS) y del análisis de la dimensión didáctica (faceta interaccional y mediacional). Se debe considerar que esto se realiza de acuerdo con las transcripciones de video de las clases del docente.

Para empezar, se exponen los resultados de los análisis de las dos clases observadas del docente con respecto a funciones lineales y funciones cuadráticas (dominio, rango, gráficas, diferencia entre las funciones). Para la dimensión matemática en la faceta epistémica, y para la dimensión didáctica en las facetas interaccional y mediacional, los resultados se muestran en correspondencia con la numeración de los indicadores de los anexos 2, 3 y 4.

4.1 Resultados de la dimensión matemática en el sistema de prácticas matemáticas (primer nivel del EOS)

El docente aplica cinco de los seis significados holísticos de referencia de la función mencionados en Parra (2015). Sobre esa base, se puede considerar idoneidad en cuanto a los significados[3] de la función en los sistemas de prácticas que utiliza en su clase. A partir de estos significados, de acuerdo con los análisis de las clases del docente, se puede dar cuenta del significado personal del docente, es decir, del significado de la función que utiliza el docente en su clase, y que ha sido tomado como referencia de los libros de texto que se le ha sido asignado o de los libros que él mismo considera para sus sesiones.

A continuación, se detallan aquellos significados personales que el docente que utilizó en sus clases de función:

- La función como correspondencia: Tiene sus raíces en el desarrollo del concepto de número «[…] En este sentido se entenderá por correspondencia a aquello que asocia elementos entre dos conjuntos» (Parra, 2015, p. 56).
- La función como representación gráfica: Esta acepción surge de la intención de representar la relación de variabilidad entre magnitudes físicas por medio de gráficas. «[…] Por otro lado, la idea de función como curva es parte del significado de función como expresión gráfica» (Parra, 2015, p. 57).
- La función como expresión analítica: «[…] Euler apoyado en las nociones de su maestro Bernoulli, propone la siguiente definición de función: *Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta de cualquier forma que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes*» (Parra, 2015, p. 58).
- La función como correspondencia arbitraria:

> […] Esta acepción de la función es definida ampliamente por Dirichlet (1837), quien la enuncia de la siguiente manera: *Si una variable y está relacionada con otra variable x de tal manera que se atribuya un valor numérico a x hay una regla según la cual queda determinado un único valor de y, entonces se dice que y es una función de la variable dependiente x* (Parra, 2015, p. 59).

- La función a partir de la teoría de conjuntos:

> […] La influencia que dicha teoría posee sobre la noción de función, permite establecer la definición formal del objeto matemático función: Sean X e Y dos conjuntos no vacíos. Una función f definida en un conjunto X y con valores en Y es una ley mediante la cual se hace corresponder a cada elemento de X un elemento de Y. Se dice también que f es una aplicación de X en Y. Para un elemento genérico $x \in X$ denotaremos habitualmente por $f(x)$ el elemento Y correspondiente a ese x, y se dirá

3. Según el EOS, los significados pueden ser institucionales o personales. El significado de un objeto personal es el sistema de prácticas personales de un individuo para resolver el campo de problemas del que emerge un objeto en un momento dado.

> también que $f(x)$ es el valor de la función f en x, esto se expresa a veces mediante la igualdad $y = f(x)$ (Parra, 2015, p. 59).

De acuerdo con los significados de función utilizados por el docente, se puede considerar que este tiene una idoneidad alta en la dimensión matemática con respecto a los significados personales de función.

4.2 Resultados de la dimensión matemática en la faceta epistémica

En el análisis epistémico, se identificaron los objetos primarios utilizados del EOS (elementos lingüísticos, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) en la explicación de la resolución de ejercicios planteados por el docente muestra de estudio. En un análisis anterior[4], se realizó la construcción del significado de referencia para las funciones para poder realizar la identificación de los conocimientos didácticos matemáticos en esta faceta epistémica.

A continuación, se presentan los resultados del análisis según los componentes y los indicadores de la idoneidad epistémica de las funciones –expuestos en el anexo 2–, que están basados en los componentes e indicadores de la idoneidad epistémica (Godino, 2011) planteados en el anexo 1.

Conocimiento común

1. El docente identifica los conocimientos básicos referidos a las funciones, además de que realiza su presentación formal de acuerdo con el significado epistémico, utilizando cinco significados para las funciones de los seis significados holísticos de las funciones (Parra, 2015).

Conocimiento especializado

a. Situaciones-problemas

2. Las situaciones que propone el docente se restringen a ejercicios de funciones en el contexto matemático, es decir, sin otra contextualización. Sin embargo, para la explicación introductoria del tema, hizo referencia a situaciones relacionadas con un contexto extra-matemático.
   2.1. El docente, durante las dos horas de clase, planteó ejercicios en contexto gráfico. Se observó que realizó los procesos de simbolización; representación; y, de lo particular, estableció una generalización.

4. Dicho análisis se enfocó en los significados de referencia de las funciones identificados en los libros de texto usados por el docente en su clase. Estos no se muestran en esta investigación, debido a que se trata de un análisis bastante amplio, que es parte de la investigación de mi tesis de doctorado, la cual sigue en proceso.

2.2. El docente, durante las dos horas de clase, propuso ejercicios en contexto algebraico. Se registró que llevó a cabo los procesos de simbolización; representación; y, de lo particular, planteó una generalización.
2.3. El docente combinó el contexto gráfico y el analítico durante las dos horas de clase. Los procesos que realizó son los mencionados anteriormente.

3. El docente propuso situaciones contextualizadas en la parte introductoria del tema de funciones, es decir, al inicio de su primera clase, para llegar a un concepto determinado con respecto a las funciones. No obstante, no presentó situaciones específicas de generación de problemas en la parte introductoria de la clase ni durante el resto de la clase. Luego de la parte introductoria del tema, explicó los significados de los objetos relacionados con al tema de funciones, mediante ejercicios sin contextualización.
4. El docente explicó las situaciones contextualizadas conforme al nivel de los estudiantes. En la medida que sus estudiantes se encuentran en el primer semestre académico, les hizo recordar las funciones de manera sencilla, con temas de funciones que se imparten en el colegio. Sobre esa base, luego, amplió su explicación en términos matemáticos más formales. Por ejemplo, anotó la diferencia entre función afín y función lineal (generalmente, los estudiantes recién egresados de la escuela secundaria no toman en cuenta esta diferencia).

b. Elementos lingüísticos

5. El docente utilizó distintos modos de expresión, con excepción de la tabulación. Partiendo de Duval (2014), podemos afirmar que solo realizó tratamientos, es decir, representaciones de las funciones dentro de un mismo registro.
6. El docente usó el lenguaje propio de las matemáticas que explicó. Esto se puede constatar con el significado de referencia – que se compara con el lenguaje usado por el docente[5].

c. Elementos regulativos (Definiciones, proposiciones, procedimientos)

El docente desempeña el rol de ser quien asume la institucionalización en la explicación de los temas tratados en clase con respecto a las funciones y no negocia estos significados con los estudiantes. Es decir, no promueve la participación de los estudiantes en la interpretación de las funciones, aunque sí incentiva a que los estudiantes se expresen durante la explicación de los temas, haciéndolos participar de lo que está explicando. En esa línea, el docente presenta los enunciados y los procedimientos básicos de las funciones linea-

5. Este no se muestra en este artículo, debido a que forma parte de la investigación en curso de mi tesis de doctorado.

les y cuadráticas haciendo fluir el entendimiento de los estudiantes que están recordando el tema, pues son estudiantes recién egresados de la educación secundaria. Dentro de esa dinámica, el docente no aplicó el modo de expresión tabular, no interpretó los resultados obtenidos luego de realizar las representaciones, ya sean mediante la regla de correspondencia o a través de la gráfica.

En general, la explicación de la clase del docente es adecuadamente estructurada y ordenada. Asimismo, utiliza el lenguaje propio del significado epistémico de las funciones. Sus procedimientos, en los ejercicios desarrollados, están centrados en lo algebraico-algorítmico. En relación con ello, se debe precisar que no realizó problemas, solo ejercicios. Con respecto a la interpretación de los resultados en la resolución de ejercicios, el docente se limitó a dar la explicación de manera formal de los resultados obtenidos.

d. Argumentos

7. Al abordar las funciones cuadráticas, el docente pudo haber explicado más detalladamente la ubicación de los pares ordenados en el plano cartesiano. En la medida que no utilizó el lenguaje tabular, no realizó dicha explicación. En cuanto a los modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico) del docente en el procedimiento de resolución de ejercicios, utilizó la formalización clara y detallada acorde con los significados epistémicos de la función.
8. El docente, en general, institucionaliza los significados de las funciones haciendo participar a los estudiantes, pero para que lleguen a lo que él ha planteado.

En general, en la idoneidad epistémica del docente, los objetos y procesos del EOS que utilizó fueron bien estructurados, de manera que detallaron la formalización de los significados de los objetos matemáticos de la función. Los procesos empleados correspondieron a la simbolización, la representación, la particularización, la generalización y la algoritmización, según los siguientes objetos: lenguajes, proposiciones, procedimientos, argumentos y conceptos. Además, realizó el proceso de tratamiento de expresiones simbólicas.

Conocimiento ampliado

Relaciones (conexiones, significados)

9. El docente realiza tratamientos, pero no institucionaliza la importancia de estos; es decir, en este caso, no relaciona ni articula de manera significativa los objetos matemáticos.

4.3 Resultados de la dimensión didáctica en la faceta interaccional

A continuación, se presenta los resultados del análisis de acuerdo con los componentes e indicadores de la idoneidad interaccional (Godino, 2014) dados en el anexo 3.

Interacción entre los alumnos

10. El docente, al finalizar aproximadamente una hora de clase, dio un tiempo aproximado de diez minutos para que los estudiantes conversen, consulten entre sí y también le consulten a él. De este modo, favoreció el diálogo entre los alumnos.
11. Como los estudiantes que se sentaron en las primeras filas son generalmente los que participan en clase, cuando el docente plantea preguntas, hace que participen también aquellos que se encuentran sentados en las últimas filas llamándolos por su nombre.

Autonomía

12. Después de aproximadamente una hora de clase, el docente brindó unos diez minutos para que los estudiantes, desde sus carpetas, lo llamen para hacerle consultas; él fue explicando conforme lo llamaban. En paralelo, los alumnos podían consultarse entre sí. Cabe anotar que, en esa dinámica, el docente no dio nuevos ejemplos o contraejemplos para que los estudiantes exploren o presenten soluciones, sino que el tiempo que otorgó para que pregunten o se consulten entre ellos se orientó a los objetos matemáticos explicados en la clase.

Evaluación formativa

13. En este caso, se puede intuir que el docente aprecia cómo los estudiantes van entendiendo el tema. Aclara sus dudas, mientras que las consultas frecuentes las aclara en la pizarra para que las puedan entender todos los estudiantes.

Interacción docente-discente

14. El docente tuvo empatía con los estudiantes. Como este tema de funciones se desarrolló casi al final del semestre académico, él ya sabía los nombres de los estudiantes. Además, tuvo una actitud jovial y hacía reír a sus estudiantes de forma espontánea, según cómo iba avanzando la clase. A partir de ello, los estudiantes tenían confianza al responder a las preguntas planteadas por el docente durante su sesión.

De 60 matriculados, asistieron aproximadamente 50 alumnos a las 2 clases. Eran pocos los alumnos que participaban cuando el docente elaboraba una pregunta mientras explicaba el tema. Generalmente, participaban aquellos estudiantes que estaban sentados en las tres primeras filas de carpetas. Sin embargo, el docente trataba de incluir a los alumnos que se sentaban en las filas lejanas de la pizarra, dirigiéndose a estos por su nombre. En general, el docente logró que sus alumnos participaran a través de preguntas dirigidas a todos o algunos en particular. En ese contexto, el docente es el resolutor y el expositor en toda la clase, mientras que sus estudiantes se limitan a responder cuando la pregunta va dirigida a ellos. En lo que respecta a las preguntas que hizo el docente, en general, estas se enfocaron en el tipo de funciones, el dominio y su gráfica. Como parte de la explicación, el docente mostró las diferencias entre las funciones de forma algebraica y, también, de manera gráfica.

4.4 Resultados de la dimensión didáctica en la faceta mediacional

A continuación, se presenta los resultados del análisis de acuerdo con los componentes y los indicadores de la idoneidad mediacional (Godino, 2011) planteados en el anexo 4.

Recursos materiales

15. Los materiales que utilizó el docente fueron el libro de texto y la pizarra. En ese sentido, se constata la falta de recursos mediacionales en la implementación de la clase; no se favorece la utilización de recursos digitales. Por ejemplo, habría sido motivador y preciso detallar, en determinados momentos de la clase, las gráficas de las funciones con *software* libres que se ofrecen en la red.

Distribución del tiempo

16. El tiempo de clase está bien establecido, a partir de lo cual las explicaciones de todos los objetos matemáticos mencionados en clase llegan a buen término. El tiempo estuvo estructurado de la siguiente forma:

- Tiempo para la introducción
- Tiempo para la definición de conceptos y, a la vez, de ejercicios
- Tiempo en que realiza una síntesis del tema
- Tiempo para que los estudiantes resuelvan sus dudas
- Tiempo al final de la clase para que los alumnos se acerquen al docente a consultarle sus dudas

Número de alumnos, horario y condiciones del aula

17. La clase está compuesta por un número significativo de estudiantes: aproximadamente, 60 estudiantes para un aula relativamente amplia. En cuanto al horario, parece adecuado, en la medida que la clase se dicta durante las primeras horas de la tarde. Asimismo, las condiciones del aula son favorables: buena iluminación, cortinas oscuras y claras para el manejo del ambiente del aula[6], proyector, escritorio para el docente con computadora incorporada, carpetas distribuidas por siete filas y dos columnas, de modo que en cada fila se podían sentar cuatro estudiantes.

De acuerdo con todos los resultados vistos anteriormente se muestra, en síntesis, la idoneidad epistémica, interaccional y mediacional del conocimiento matemático y didáctico del docente en los anexos 5, 6 y 7.

5. Conclusiones

A partir de los resultados de los componentes y los indicadores del conocimiento matemático y didáctico del docente, presentados en la sección anterior y sintetizados en los anexos 5, 6 y 7, se puede afirmar que el conocimiento matemático del docente fue mayor que su conocimiento didáctico. Asimismo, el conocimiento matemático y didáctico del docente fue medio.

En cuanto a la idoneidad matemática en la faceta epistémica del docente, se observó que, en las explicaciones del docente, faltó detallar las diferencias entre las funciones y argumentar los resultados de los ejercicios. Puesto que el tema de funciones es de gran importancia en la formación académica de los estudiantes, y dado que los mismos tienen muchas dificultades en cuanto a su significado y representación, tendría que ser fundamental hacer una clase con todos los detalles de las funciones para contribuir con un mejor entendimiento por parte de los estudiantes.

En lo que respecta a la idoneidad didáctica interaccional del docente, se puede indicar que se requiere que el docente trate de involucrar más a los estudiantes en su aprendizaje, que ellos sean los que llegan a una solución o afirmación por sí mismos. En esa dinámica, el rol del docente sería el de un mediador, que institucionalice los significados de las funciones una vez que haya habido discusión y participación por parte de los estudiantes. Para ello, se requeriría que, en la explicación de los temas, se planteen situaciones problemáticas que ayuden a definir los conceptos, a entender los procesos y a interpretar los resultados. Estas situaciones se tendrían que articular de modo que los estudiantes aprendan de manera significativa los lenguajes, las reglas, los argumentos, lo

6. Con estas cortinas, en caso se proyectara algo en pizarra, se podía oscurecer el ambiente y, en caso se quisiera tener abiertas las ventanas sin que entrase el viento, se podía mantener las cortinas claras para que taparan las ventanas.

cual tendría que ser análogo para los ejercicios presentados por el docente.

En relación con la idoneidad didáctica mediacional del docente, se puede afirmar que el docente tendría que contar con mayor variedad de estrategias y recursos didácticos que facilite un protagonismo de los estudiantes en la construcción de sus conocimientos, que permita una confrontación entre los estudiantes y los conocimientos recibidos para que haya una mayor interacción entre los mismos estudiantes, y entre estos y el docente. Asimismo, se sugiere el uso de tecnología en sus clases como un medio –por ejemplo– para notar las diferencias entre los tipos de funciones, los dominios, los rangos, y entre las gráficas y las funciones.

Para caracterizar los conocimientos matemáticos y didácticos que utiliza este docente en su metodología de clase, al abordar el tema de función, se tendría que triangular la información que nos da el análisis de las clases del docente con entrevistas, que es parte de una investigación más amplia (que está en curso). Considerando todas las clases que el docente dictó sobre el tema de las funciones (no solo dos de sus clases), y realizando todos los análisis con todas las dimensiones del CDM y los niveles mencionados del EOS, se podría caracterizar el conocimiento didáctico y matemático del docente. Esto forma parte de una investigación más amplia, que –como ya se ha señalado– está en proceso.

En este artículo, se ha pretendido mostrar el modelo del conocimiento didáctico-matemático como una alternativa de análisis para las clases de matemática a nivel universitario con el fin de ayudar, según se requiera, a realizar modificaciones dentro de la práctica docente, cualquiera sea la metodología que se aplique en clases. En el análisis de dichas clases, mediante la aplicación de 3 de los 5 niveles del EOS (nivel 1: sistema de prácticas matemáticas; nivel 2: configuración de objetos y procesos; y nivel 5: la idoneidad didáctica) se pudo describir «¿qué ha ocurrido aquí?» y valorar «¿qué se podría mejorar?».

Con la aplicación del modelo CDM, en el análisis de las transcripciones de clase, se pudo observar que la metodología del docente muestra de estudio corresponde al de una clase magistral: él es quien despliega el mayor esfuerzo por hacer que los estudiantes entiendan el tema de clase, mientras que la receptividad le compete al estudiante. En este marco, la técnica que utiliza es el dar ejemplos y plantear ejercicios. A través de este modelo, se pudo apreciar características de los docentes que conducen a una reflexión en torno a la mejora en las estrategias y las acciones que debería tomar el docente en su actividad de enseñanza. A partir de ello, se plantea que los docentes deberían tener una competencia en análisis de sus propias prácticas. En esa línea, se puede apreciar la gran utilidad del modelo CDM, que permite un análisis pormenorizado de los conocimientos del docente; y, de este modo, poder dar pautas de mejora en el proceso de enseñanza-aprendizaje en temas en general de matemáticas.

Se pone de manifiesto la importancia de fomentar la reflexión del docente en su propia práctica, teniendo en cuenta que existen varios modelos de conocimiento matemático y didáctico que pueden ayudar a mejorar la enseñanza de los distintos tópicos de matemática (mencionados en la introducción de esta investigación). Además, cabe anotar que existen varias investigaciones actuales con respecto al conocimiento matemático y didáctico de los docentes, tales como Medrano (2016) y otros.

Esta actividad de análisis sobre la propia práctica de los docentes universitarios de matemáticas es un reto que requiere del desarrollo de la competencia de análisis didáctico. Sobre esta, hay investigaciones, como Godino, Rivas, Castro y Konic (2012), que señalan que el profesor de educación primaria y secundaria debe presentar un cierto nivel de competencia para este tipo de análisis.

En general, los profesores pueden evaluar y caracterizar su conocimiento didáctico y matemático aplicando el modelo CDM como en el caso estudiado del docente, es decir, aplicar el modelo CDM en el análisis de la metodología de sus clases para así conocer las dificultades, carencias didáctico-matemáticas de la enseñanza de temas específicos de matemática, así como fortalecer su enseñanza.

La limitación de esta investigación reside en que solo se muestra los resultados de dos de las tres dimensiones del modelo CDM: dimensión matemática y dimensión didáctica. De la dimensión didáctica, solo se exponen los resultados de tres de las seis facetas del modelo: epistémica, interaccional y mediacional. Para el análisis de la metodología de clases del docente en estudio, se requeriría aplicar el modelo CDM con todas sus dimensiones y facetas (mencionadas en el marco teórico de esta investigación). Asimismo, se tendría que realizar entrevista(s) al docente muestra de estudio para complementar y contrastar lo analizado en los videos de sus clases, y así poder tener un análisis más preciso de la metodología que aplica en ellas.

Nota biográfica

Teresa Sofía Oviedo Millones
Es doctoranda en Ciencias de la Educación de la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) y magister en Enseñanza de las Matemáticas por la PUCP. Docente de Posgrado del Departamento Académico de Educación de la PUCP. Además, es miembro del Grupo de Investigación: Educación y Tecnología (EDUTEC) del departamento académico de Educación de la PUCP y miembro de la Asociación Peruana de Investigación en Educación Matemática (APINEMA). Sus investigaciones y publicaciones se vinculan con la línea de investigación del área de Gestión de la Educación (nivel superior): Formación, evaluación y desarrollo profesional de docentes y con la línea de formación de profesores de Matemática (nivel superior).

Referencias

D'Amore, B. & Godino, J. D. (2007) El enfoque ontosemiótico como un desarrollo de la teoría antropológica en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(2), 191-218.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales.* Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Font, V. & Godino, J. D. (2006). La noción de configuración epistémica como herramienta de análisis de textos matemáticos: Su uso en la formación de profesores. *Educaçao Matematica Pesquisa, 8*(1), 67-98.

Godino, J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Iberoamericana de Educación Matemática*, *20*, 3-31.

Godino, J. D. (2011). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.* XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática (Ciaem-Iacme). Recife, 26-30, junho.

Godino, J. D. (2013). Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, *11*, 111-132.

Godino, J. D. (2014). *Síntesis del enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos: Motivación, supuestos y herramientas teóricas.* Granada: Universidad de Granada. Recuperado de http://enfoqueontosemitico.ugr.es/documentos/sintesis_EOS_2abril2016.pdf

Godino, J. D. & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherche en Didactique des Mathématiques, 14*(3), 325-355.

Godino, J. D. & Batanero, C. (1998). Clarifying the meaning of mathematical objects as a priority area of research in mathematics education. In A. Sierpinska & J. Kilpatrick (Eds.), *Mathematics education as a research domain: A search for identity* (pp. 177-195). Dordrecht: Kluwer, A. P.

Godino, J. D., Batanero, C. & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education, 39*(1), 127-135. doi: 10.1007 /s11858-006-004-1

Godino, J. D., Batanero, C., Font, V. & Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: El modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T. Fernández & A. Berciano (Eds.), *Investigación en educación matemática XX* (pp. 285-294). Málaga: Seiem.

Godino, J. D., Bencomo, D., Font, V. & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. *Paradigma*, *27*(2), 221–252.

Godino, J. D., Contreras, A. & Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *26*(1), 39-88.

Godino, J. D., Font, V. & Wilhelmi, M. R. (2006). Análisis ontosemiótico de una lección sobre la suma y la resta. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa, 9*, 131-155.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. & Castro, C. de (2007). *Aproximación a la dimensión normativa en didáctica de la matemática desde un enfoque ontosemiótico.* XXI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Maracaibo, 22-26 de julio.

Godino, J. D., Gonzato, M., Fernández, T. (2010). ¿Cuánto suman los ángulos interiores de un triángulo? Conocimientos puestos en juego en la realización de una tarea matemática. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 341-352). Lleida: SEIEM.

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. & Konic, P. (2012). Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática, 7*(2), 1-21.

Medrano, E. (2016). Conocimiento de la práctica matemática (KPM). En J. Carrillo, L.C. Contreras & M. Montes (Eds.), *Reflexionando sobre el conocimiento del profesor. Actas de las II Jornadas del Seminario de Investigación de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Huelva* (pp. 30-34). Huelva: SGSE.

Moreno, M. & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores de los profesores universitarios de matemáticas acerca de la enseñanza de las ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias*, *21*(2), 265-280.

Parra, Y. (2015). *Significados pretendidos por el currículo de matemáticas chileno sobre la noción de función* (tesis de maestría en Educación Matemática). Santiago, Chile: Universidad de Los Lagos, Escuela de Posgrado. Recuperado de https://www.dropbox.com/s/2yf2yj84cfn2z3n/TESIS%20MAG%C3%8DSTER_YOCELYN%20PARRA.pdf?dl=0

Pino-Fan, L. & Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma, 36*(1), 87-109.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. & Font, V. (2011). Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. *Educação Matemática Pesquisa, 13*(1), 141-178.

Pino-Fan, L., Godino, J. D. & Font, V. (2013). Diseño y aplicación de un instrumento para explorar la faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático de futuros profesores sobre la derivada (segunda parte). *Revemat*, Edición especial (dez.), *8*, 1-47.

Rowland, T., Huckstep, P. & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 255-281.

Rowland, T. & Ruthven, K. (Eds.) (2011). *Mathematical knowledge in teaching.* Mathematics Education Library, Series 50. London: Springer.

Schoenfeld, A. & Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. In D. Tirosh & T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.

Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, *15*(2), 4-14.

Shulman, L.S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, *57*(1), 1-22.

Anexos

Anexo 1. Componentes e indicadores de la idoneidad epistémica (matemática)

Componentes	Indicadores
Conocimiento común	Resuelve la tarea.
Conocimiento especializado	Elabora la configuración de objetos y procesos puestos en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas.
Situaciones-problemas	Selecciona una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación. Propone situaciones de generación de problemas (problematización). La situación planteada corresponde al nivel educativo de los estudiantes.
Elementos lingüísticos	Usa diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico, etc.), traducciones y conversiones entre los mismos. El nivel del lenguaje es adecuado para el nivel al que se dirige. Promueve la expresión e interpretación.
Elementos regulativos (definiciones, proposiciones, procedimientos)	Las definiciones y los procedimientos son claros y correctamente enunciados, adaptados al nivel educativo a que se dirige. Presenta los enunciados y procedimientos básicos del tema.
Argumentos	Promueve la generación y negociación de las definiciones y de los procedimientos. Adecúa las explicaciones, las comprobaciones y las demostraciones al nivel educativo al que se dirige. Promueve momentos de generación y negociación de argumentos, de validación.
Conocimiento ampliado: • Relaciones (conexiones, significados)	Relaciona y articula de manera significativa los objetos matemáticos puestos en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones en que se organizan.

Fuente: Godino (2009, 2011).

Anexo 2. Componentes e indicadores de la idoneidad epistémica de las funciones (matemática)

Componentes	Indicadores
Conocimiento común	1. Identifica los conocimientos básicos referidos a los objetos matemáticos involucrados en las funciones y los explica de manera formal.
Conocimiento especializado	Elabora la configuración de objetos y procesos puestos en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas:
• Situaciones-problemas	2. Selecciona una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación: 2.1. Problemas o ejercicios en contexto gráfico 2.2. Problemas o ejercicios en contexto analítico 2.3. Problemas o ejercicios que articulan los contextos gráficos y analíticos 3. Propone situaciones de generación de problemas (problematización). 4. La situación planteada corresponde al nivel educativo de los estudiantes.
• Elementos lingüísticos	5. Usa diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico, etc.), tratamientos y conversiones entre los mismos. 6. El nivel del lenguaje es adecuado para el nivel al que se dirige. 7. Promueve la expresión e interpretación de las funciones: • Presenta los enunciados y procedimientos básicos de las funciones lineales y cuadráticas.
• Elementos regulativos (definiciones, proposiciones, procedimientos)	• Brinda las definiciones de las funciones mediante su regla de correspondencia. • Muestra la representación gráfica de las funciones lineales y cuadráticas mediante su regla de correspondencia ubicando los pares ordenados en el plano correspondiente a dicha función. • Identifica las funciones lineales y cuadráticas en el plano de coordenadas rectangulares, y muestra sus diferencias. • Elabora la representación algebraica de la función lineal y de la función afín, y muestra sus diferencias. • Interpreta los resultados obtenidos luego de la resolución de problemas o ejercicios que involucran las funciones lineales y cuadráticas.
•Argumentos	8. Justifica con rigor su procedimiento en la resolución de problemas y ejercicios de funciones lineales y cuadráticas. 9. Promueve momentos de generación y negociación de argumentos, de validación.
Conocimiento ampliado: • Relaciones (conexiones, significados)	10. Relaciona y articula de manera significativa los objetos matemáticos puestos en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones en que se organizan.

Fuente: Godino (2011). Elaboración propia.

Anexo 3. Componentes e indicadores de la idoneidad interaccional

Componentes	Indicadores
Interacción entre los alumnos	11. Favorece el diálogo entre los estudiantes. 12. Favorece la inclusión en el grupo y se evita la exclusión.
Autonomía	13. Contempla momentos en que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantea cuestionarios y presenta soluciones, explora ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar).
Evaluación formativa	14. Observa sistemáticamente el progreso cognitivo de los alumnos.
Interacción docente-discente	15. Utiliza diferentes recursos y argumentos en la explicación de la clase que propicia la interacción entre el docente y los estudiantes.

Fuente: Godino (2011)

Anexo 4. Componentes e indicadores de la idoneidad mediacional

Componentes	Indicadores
Recursos materiales	16. Utiliza materiales físicos y virtuales apropiados en la explicación de clase.
Distribución del tiempo	17. El tiempo previsto es suficiente para realizar las actividades de comprensión de la clase.
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	18. La distribución de los estudiantes, el horario y las condiciones del aula son apropiados.

Fuente: Godino (2011)

Anexo 5. Componentes e indicadores de la idoneidad epistémica de las funciones (matemática)

Componentes	Indicadores	Características
Conocimiento común	1. Identifica los conocimientos básicos referidos a los objetos matemáticos involucrados en las funciones y los explica de manera formal.	Sí
Conocimiento especializado	Elabora la configuración de objetos y procesos puestos en juego en las soluciones plausibles de la tarea y otras relacionadas:	
• Situaciones-problemas	2. Selecciona una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación:	Sí
	2.1 Problemas o ejercicios en contexto gráfico	Sí Sí
	2.2 Problemas o ejercicios en contexto analítico	Sí
	2.3 Problemas o ejercicios que articulan los contextos gráficos y analíticos	No
	3. Propone situaciones de generación de problemas (problematización).	Sí
	4. La situación planteada corresponde al nivel educativo de los estudiantes.	
• Elementos lingüísticos	5. Usa diferentes modos de expresión (verbal, gráfico, simbólico, etc.), tratamientos y conversiones entre los mismos.	Sí (con excepción de la expresión tabular)
	6. El nivel del lenguaje es adecuado para el nivel al que se dirige.	Sí
• Elementos regulativos (Definiciones, proposiciones, procedimientos)	7. Promueve la expresión e interpretación de las funciones:	
	• Presenta los enunciados y procedimientos básicos de las funciones lineales y cuadráticas.	Sí
	• Da las definiciones de las funciones mediante su regla de correspondencia.	Sí
	• Muestra la representación gráfica de las funciones lineales y cuadráticas mediante su regla de correspondencia ubicando los pares ordenados en el plano correspondientes a dicha función.	Sí
	• Identifica las funciones lineales y cuadráticas en el plano de coordenadas rectangulares, y muestra sus diferencias.	No

	• Elabora la representación algebraica de la función lineal y de la función afín, y muestra sus diferencias.	No
	• Interpreta los resultados obtenidos luego de la resolución de problemas o ejercicios que involucra las funciones lineales y cuadráticas.	No
Argumentos	8. Justifica con rigor su procedimiento en la resolución de problemas y ejercicios de funciones lineales y cuadráticas. 9. Promueve momentos de generación y negociación de argumentos, de validación.	No
Conocimiento Ampliado: • Relaciones (conexiones, significados)	10. Relaciona y articula de manera significativa los objetos matemáticos puestos en juego (situaciones, lenguaje, reglas, argumentos) y las distintas configuraciones en que se organizan.	No

Fuente: Godino (2011). Elaboración propia.

Anexo 6. Idoneidad interaccional del conocimiento didáctico del docente

Componentes	Indicadores	Resultados
Interacción entre los alumnos	11. Favorece el diálogo entre los estudiantes. 12. Favorece la inclusión en el grupo y evita la exclusión.	Sí Sí
Autonomía	13. Contempla momentos en que los estudiantes asumen la responsabilidad del estudio (plantea cuestionarios y presenta soluciones; explora ejemplos y contraejemplos para investigar y conjeturar).	No
Evaluación formativa	14. Observa sistemáticamente el progreso cognitivo de los alumnos.	Sí
Interacción docente-discente	15. Utiliza diferentes recursos y argumentos en la explicación de la clase que propician la interacción entre el docente y los estudiantes.	No

Fuente: Godino (2011). Elaboración propia.

Anexo 7. Idoneidad mediacional del conocimiento didáctico del docente

Componentes	Indicadores	Resultados
Recursos materiales	16. Utiliza materiales físicos y virtuales apropiados en la explicación de clase.	No
Distribución del tiempo	17.El tiempo previsto es suficiente para realizar las actividades de comprensión de la clase.	Sí
Número de alumnos, horario y condiciones del aula	18. La distribución de los estudiantes, el horario y las condiciones del aula son apropiados.	Sí

Fuente: Godino (2011). Elaboración propia.